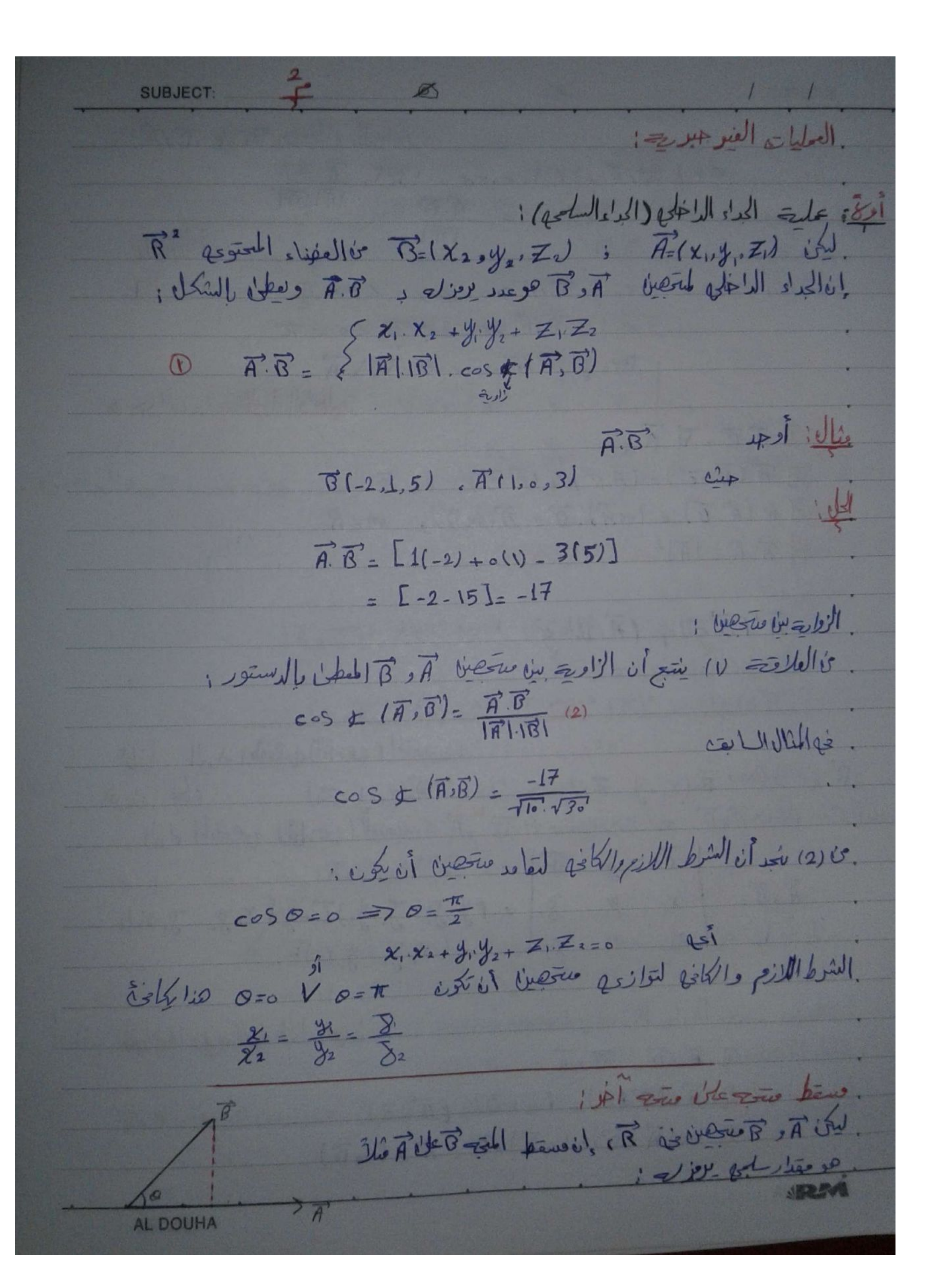


SUBJECT: $\frac{2}{4}$

العمليات الفيزوجبرية:

أولاً: عملية الجداء الداخلي (الجداء السلمي):

ليكن $\vec{A}=(x_1,y_1,z_1)$ ؛ $\vec{B}=(x_2,y_2,z_2)$ من الفضاء المحتوى $\vec{R}^2$

إن الجداء الداخلي لمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو عدد يرمز له بـ $\vec{A}.\vec{B}$ ويعطى بالشكل:

$$\vec{A}.\vec{B} = \begin{cases} x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 \\ |\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\measuredangle(\vec{A},\vec{B}) \end{cases} \quad (1)$$

زاوية

مثال: أوجد $\vec{A}.\vec{B}$

حيث $\vec{A}(1,0,3)$ ، $\vec{B}(-2,1,5)$

الحل:

$$\vec{A}.\vec{B} = [1(-2)+0(1)-3(5)]$$
$$= [-2-15] = -17$$

الزاوية بين متجهين:

من العلاقة (1) ينتج أن الزاوية بين متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ المعطى بالدستور:

$$\cos\measuredangle(\vec{A},\vec{B}) = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|} \quad (2)$$

في المثال السابق

$$\cos\measuredangle(\vec{A},\vec{B}) = \frac{-17}{\sqrt{10}.\sqrt{30}}$$

من (2) نجد أن الشرط اللازم والكافي لتعامد متجهين أن يكون:

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

أي

$$x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 = 0$$

الشرط اللازم والكافي لتوازي متجهين أن تكون $\theta=\pi$ أو $\theta=0$ هذا يكافئ

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

مسقط متجه على متجه آخر:

ليكن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متجهين في $\vec{R}$ ، إن مسقط المتجه $\vec{B}$ على $\vec{A}$ مثلاً

هو مقدار سلمي يرمز له:

AL DOUHA

ويعطى بالدستور: $Proj\ \vec{B}/\vec{A}$.

$$Proj\ \vec{B}/\vec{A} = |\vec{B}|.\cos\theta = |\vec{B}|.\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}$$

نلاحظ أن:

-1- مقدار موجب $Proj\ \vec{B}/\vec{A} > 0 \Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

// $\vec{B}/\vec{A} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$Proj\ \vec{B}/\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} \perp \vec{A}$

★ خواص عملية الجداء الداخلي:

1] $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

2] $\vec{A}(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}.\vec{B}) + (\vec{A}.\vec{C})$

3] $m(\vec{A}.\vec{B}) = (m\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}(m\vec{B})$; $m \in R$

4] $\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|^2$

$$\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C}) \neq (\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}$$

يوازي A   يوازي C

ثانياً: الجداء المتجهي (الخارجي) لمتجهين:

تعريف: ليكن $\vec{A}=(x_1, y_1, z_1)$ ، $\vec{B}=(x_2, y_2, z_2)$ متجهين في R^2.

الجداء المتجهي (الخارجي) للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو متجه يرمز له $\vec{A}\times\vec{B}$ ويعطى بمفكوك المحدد:

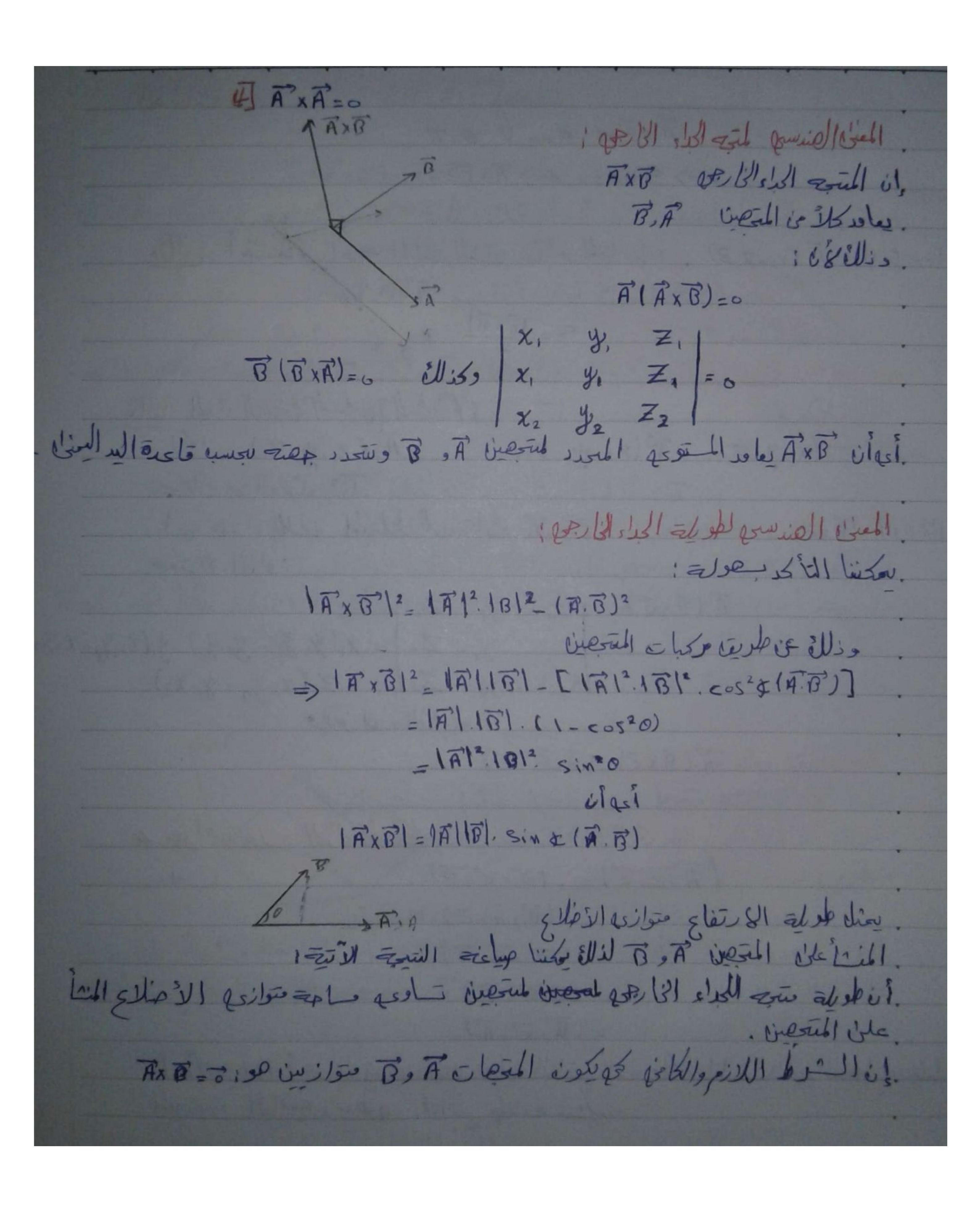
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1.z_2 - z_1.y_2)\vec{i} - \vec{j}(x_1.z_2 - z_1.x_2) + (x_1.y_2 - y_1.x_2)\vec{k}.$$

خواص عملية الجداء الخارجي:

1] $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

2] $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B}) + (\vec{A}\times\vec{C})$

3] $m(\vec{A}\times\vec{B}) = (m\vec{A})\times\vec{B} = \vec{A}\times(m\vec{B})$



4] $\vec{A}\times\vec{A}=0$

المعنى الهندسي لمتجه الجداء الخارجي :

إن المتجه الجداء الخارجي $\vec{A}\times\vec{B}$

يعامد كلاً من المتجهين $\vec{B},\vec{A}$

وذلك لأن :

$\vec{A}(\vec{A}\times\vec{B})=0$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$$

وكذلك $\vec{B}(\vec{B}\times\vec{A})=0$

أي أن $\vec{A}\times\vec{B}$ يعامد المستوي المحدد لمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وتتحدد جهته بحسب قاعدة اليد اليمنى .

المعنى الهندسي لطويلة الجداء الخارجي :

يمكننا التأكد بسهولة :

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2=|\vec{A}|^2.|B|^2-(\vec{A}.\vec{B})^2$$

وذلك عن طريق مركبات المتجهين

$$\Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}|^2=|\vec{A}|.|\vec{B}|-[|\vec{A}|^2.|\vec{B}|^2.\cos^2\measuredangle(\vec{A}.\vec{B})]$$

$$=|\vec{A}|.|\vec{B}|.(1-\cos^2\theta)$$

$$=|\vec{A}|^2.|\vec{B}|^2\ \sin^2\theta$$

أي أن

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|.\sin\measuredangle(\vec{A}.\vec{B})$$

يمثل طويلة الارتفاع متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ لذلك يمكننا صياغة النتيجة الآتية :

أن طويلة متجه الجداء الخارجي لمتجهين ~~[illegible]~~ تساوي مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين .

إن الشرط اللازم والكافي كي يكون المتجهات $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متوازيين هو : $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$

الإثبات:

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \theta = 0 \ \overset{\text{أو}}{\vee} \ \theta = \pi$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$$

مثال: أحسب مساحة المثلث الذي ضلعاه المتجاوران $\vec{A}(1,-2,3)$ ، $\vec{B}(0,-5,-1)$

$$S = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2}$$

ثالثاً: الجداء الثلاثي السلمي [المختلط]:

لتكن $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ، $\vec{B}(x_2, y_2, z_2)$ ، $\vec{C}(x_3, y_3, z_3)$ ثلاثة متجهات في الفضاء $\mathbb{R}^3$.

أي جداء ثلاثي المختلط للمتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ هو عدد يرمز له بـ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ويعطى بمفكوك الجداء:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2 \cdot z_3 - z_2 \cdot y_3) - y_1(x_2 \cdot z_3 - x \ldots$$
$$+ z_1(x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3).$$

ويرمز لهذه العملية

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$$

* خواص عملية الجداء المختلط:

-1-
$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = -(\vec{A}, \vec{C}, \vec{B})$$
$$= -(\vec{B}, \vec{A}, \vec{C})$$
$$= -(\vec{C}, \vec{B}, \vec{A})$$
$$= (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B})$$
$$= (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A})$$

أي أنه إذا أجرينا تبديل دوري يعطي الناتج ذاته، لكن إذا ثبتنا أحد المتجهات وبدلنا المتجهين الباقيين، يعطي الناتج بإشارة سالبة.

٢- $(\vec{A},\vec{A},\vec{B})=0$

٣- $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$

أي إذا وجدنا الجداء السابق بدلالة السطر الثالث فإنه يساوي الجداء بدلالة السطر الأول.

٤- $\alpha(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=(\alpha\vec{A},\vec{B},\vec{C})$

٥- $(\vec{A_1},\vec{B_1},\vec{C_1}+\vec{C_2})=(\vec{A},\vec{B},\vec{C_1})+(\vec{A},\vec{B},\vec{C_2})$

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتجهات $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ واقعة في مستوي واحد هو أن يكون: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$

الإثبات:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0 \Rightarrow \vec{A}\perp\vec{B}\times\vec{C}$$

لكن $\vec{B}\times\vec{C}$ يعامد $\vec{B}$ و $\vec{C}$ معاً.

أي $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ واقعة في مستوٍ واحد.

من جهة أخرى إذا كانت المتجهات واقعة في مستوٍ واحد أي أنها مرتبطة خطياً يمكن كتابة $\vec{A}$ مثلاً بدلالة $\vec{B}$ و $\vec{C}$.

وباعتبار أن $\vec{B}\wedge\vec{C}$ يعامد $\vec{B}$ و $\vec{C}$ بالتالي يعامد $\vec{A}$ ومنه:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$$

المعنى الهندسي للجداء المختلط:

ليكن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ثلاثة متجهات في الفضاء الثلاثي، غير واقعة في مستو واحد بالتالي يمكننا انشاء متوازي سطوح أحرفه هذه المتجهات ومنه:

$$\vec{A}\cdot|\vec{B}\times\vec{C}|=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}\times\vec{C}|\cdot\cos\theta$$

لكن $|\vec{A}|\cdot\cos\theta$ يمثل الارتفاع في متوازي السطوح و $|\vec{B}\times\vec{C}|$ يمثل مساحة القاعدة في متوازي السطوح ومنه نجد أن: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ يمثل حجم متوازي السطوح المنشأ على هذه المتجهات.

رابعاً: الجداء الثلاثي المتجهي (المضاعف):

ليكن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ثلاثة متجهات من $\mathbb{R}^3$ نعطي عملية الجداء الثلاثي المتجهي بالعلاقة التي تدعى بعلاقة جيبس:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\cdot\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$$

خامساً: جداء أربع متجهات:

-1-

$$(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\cdot(\vec{B}\cdot\vec{D})$$

وتدعى هذه العلاقة بعلاقة لاغرانج:

يمكن ببساطة إثبات صحتها بفرض $\vec{C}\times\vec{D} = \vec{f}$ يكون

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{f}$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{f}) = \vec{A}(\vec{B}\times\vec{f})$$

$$= \vec{A}\,[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})]$$

$$= \vec{A}\cdot[(\vec{B}\cdot\vec{D})\cdot\vec{C} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\cdot\vec{D}]$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

-2-

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) =$$

$$= \begin{cases} (\vec{A},\vec{B},\vec{D})\vec{C} - (\vec{A},\vec{B},\vec{C})\cdot\vec{D} \\ (\vec{A},\vec{C},\vec{D})\vec{B} - (\vec{B},\vec{C},\vec{D})\vec{A} \end{cases}$$

الإثبات غير مطلوب.